Ultrafilter-Abbildungen

Kowalsky, Hans-Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 45, 1994,
S.21-28

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Ultrafilter-Abbildungen

Von **Hans-Joachim Kowalsky***, Braunschweig

(Eingegangen am 14.10.1994)

Einleitung

Bei Strukturuntersuchungen von Ultrafiltern einer Grundmenge X spielen Punktabbildungen φ: X $\to$ X einerseits eine wesentliche Rolle, andererseits erweisen sie sich aber auch als zu wenig flexibel. Weit mehr Möglichkeiten bietet die Benutzung von Filterabbildungen, die die Menge aller Filter von X in sich abbilden. Die nachfolgenden Untersuchungen beziehen sich auf eine spezielle Klasse von Filterabbildungen, die sich durch naheliegende Eigenschaften kennzeichnen lassen und die der Anwendung auf Ultrafilter in geeigneter Weise angepaßt sind, weswegen sie als Ultrafilter-Abbildungen oder kurz als U-Abbildungen bezeichnet werden sollen.

Hinsichtlich der Symbole und Bezeichnungen sei auf die Arbeiten „Filterabbildungen" und „Abzählbar primitive Ultrafilter I, II", Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft XLII, XLIII, XLIV verwiesen, die hier übernommen werden. Insbesondere sei darauf hingewiesen, daß für Filter $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ die Ordnungsrelation $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ als zur mengentheoretischen Inklusion invers definiert ist, so daß der mit $\mathfrak{o}$ bezeichnete Filter aller Teilmengen von X (einschließlich der leeren Menge) das Nullelement der geordneten Menge aller Filter ist. Entsprechend beziehen sich die Verbandsoperationen $\wedge$ und $\vee$ auf diese Ordnungsrelation.

1. U-Abbildungen

Nachfolgend ist X immer eine feste unendliche Grundmenge, $\mathfrak{F}$ bedeutet die Menge aller Filter und $\mathfrak{U}$ die Menge aller Ultrafilter von X.

1.1. Definition Es sei $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{F}$.

(a) $\mathfrak{M}$ heißt *filtrierend*, wenn zu je zwei Filtern $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$ ein Filter $\mathfrak{c} \in \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$ existiert.

(b) $\mathfrak{M}$ heißt saturiert, wenn es zu jedem $\mathfrak{u} \in \mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{u} \leq \bigwedge_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{a}_0 \in \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{u} \leq \mathfrak{a}_0$ gibt.

Die leere Menge und die ganze Menge $\mathfrak{F}$ sind sowohl filtrierend als auch saturiert.

Abbildungen ψ: $\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ werden als *Filterabbildungen* bezeichnet. Eine Filterabbildung ψ heißt *isoton*, wenn aus $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ stets $\psi\mathfrak{a} \leq \psi\mathfrak{b}$ folgt. Spezielle Filterabbildungen werden durch Punktabbildungen φ: X $\to$ X induziert: Für einen beliebigen Filter $\mathfrak{a}$ ist

---

* Prof. em. Dr. H.-J. Kowalsky · Am Schiefen Berge 20 · D-38302 Wolfenbüttel

$\{\varphi A\colon A \in \mathfrak{a}\}$ eine Filterbasis für einen mit $\hat{\varphi}\mathfrak{a}$ bezeichneten Filter. Die so definierte Filterabbildung $\hat{\varphi}$ wird die von φ *induzierte Filterabbildung* genannt. Offensichtlich ist sie isoton.

In der folgenden Definition wird nun eine Klasse von Filterabbildungen gekennzeichnet, die neben verbandstheoretischen Eigenschaften auch noch speziell an Ultrafilter geknüpfte Eigenschaften besitzen und die daher kurz als U-Abbildungen bezeichnet werden sollen.

1.2 Definition Eine Filterabbildung ψ heißt U-Abbildung, wenn sie folgende zwei Eigenschaften besitzt:

(1) Für jede filtrierende Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{F}$ gilt

$$\psi\Big(\bigwedge_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{a}\Big) = \bigwedge_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \psi\mathfrak{a}\,.$$

(2) Zu jedem Filter $\mathfrak{a}$ und jedem Ultrafilter $\mathfrak{u}^*$ mit $\mathfrak{u}^* \leq \psi\mathfrak{a}$ existiert ein Ultrafilter $\mathfrak{u}$ mit $\mathfrak{u} \leq \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{u}^* = \psi\mathfrak{u}$.

Die letzte Eigenschaft drückt eine lokale Surjektivität der U-Abbildungen aus. Die Existenz von U-Abbildungen wird durch den folgenden Satz gesichert.

1.3 Satz *Die von einer Punktabbildung* $\varphi\colon X \to X$ *induzierte Filterabbildung* $\hat{\varphi}$ *ist eine U-Abbildung.*

Beweis: (1) $\mathfrak{M}$ sei filtrierend. Es ist $D \in \bigwedge_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{a}$ gleichwertig mit $D \in \mathfrak{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_n$ für geeignete Filter $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \in \mathfrak{M}$. Zu ihnen gibt es, weil $\mathfrak{M}$ filtrierend ist, einen Filter $\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_n$, also mit $D \in \mathfrak{b}$. Es folgt

$$\{\varphi D\colon D \in \bigwedge_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{a}\} = \{\varphi D\colon D \in \mathfrak{b} \text{ für ein } \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}\}.$$

Da die linke Menge eine Filterbasis von $\hat{\varphi}\big(\bigwedge_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{a}\big)$, die rechte Menge aber eine Filterbasis von $\bigwedge_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}} \hat{\varphi}\,\mathfrak{b}$ ist, ergibt sich die geforderte Gleichung.

(2) Es seien $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{u}^* \in \mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{u}^* \leq \hat{\varphi}\mathfrak{a}$ gegeben. $\{\varphi^- U^*\colon U^* \in \mathfrak{u}^*\}$ ist Filterbasis eines Filters $\hat{\varphi}^- \mathfrak{u}^*$, und es folgt $\mathfrak{b} = \hat{\varphi}^- \mathfrak{u}^* \wedge \mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$. Daher gibt es einen Ultrafilter $\mathfrak{u}$ mit $\mathfrak{u} \leq \mathfrak{b}$, und man erhält $\hat{\varphi}\mathfrak{u} \leq \hat{\varphi}\mathfrak{b} \leq \mathfrak{u}^*$. Wegen $\hat{\varphi}\mathfrak{u} \in \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{u}^* \in \mathfrak{U}$ folgt hieraus $\hat{\varphi}\mathfrak{u} = \mathfrak{u}^*$. •

1.4 Satz *Für jede U-Abbildung* ψ *gilt:*

(a) ψ *ist isoton.*

(b) *Ist* $\mathfrak{u}$ *ein Ultrafilter, so ist auch* $\psi\mathfrak{u}$ *ein Ultrafilter, oder es ist* $\psi\mathfrak{u} = \mathfrak{o}$.

(c) *Für saturierte Teilmengen* $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{F}$ gilt $\psi\big(\bigvee_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{a}\big) = \bigvee_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \psi\mathfrak{a}$. *Speziell ist* $\psi(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}) = \psi\mathfrak{a} \vee \psi\mathfrak{b}$.

(d) *Für alle* $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$ *gilt* $\psi\mathfrak{a} = \bigwedge_{A \in \mathfrak{a}} \bigvee_{\substack{A \in \mathfrak{u} \\ \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}}} \psi\mathfrak{u}\,.$

B e w e i s : (a) Aus $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ folgt, daß $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$ eine filtrierende Menge ist. Wegen (1) erhält man daher $\psi\mathfrak{a} = \psi(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) = \psi\mathfrak{a} \wedge \psi\mathfrak{b}$ und hieraus $\psi\mathfrak{a} \leq \psi\mathfrak{b}$.

(b) Es sei $\mathfrak{u}$ ein Ultrafilter mit $\psi\mathfrak{u} \neq \mathfrak{o}$. Dann gibt es einen Ultrafilter $\mathfrak{v}^*$ mit $\mathfrak{v}^* \leq \psi\mathfrak{u}$. Aus (2) folgt daher die Existenz eines Ultrafilters $\mathfrak{w} \leq \mathfrak{u}$ mit $\mathfrak{v}^* = \psi\mathfrak{w}$. Da $\mathfrak{u}$ ein Ultrafilter ist, muß wegen $\mathfrak{o} < \mathfrak{w} \leq \mathfrak{u}$ sogar $\mathfrak{w} = \mathfrak{u}$ und damit $\psi\mathfrak{u} = \mathfrak{v}^*$ gelten; d.h. $\psi\mathfrak{u}$ ist ein Ultrafilter.

(c) Da ψ nach (a) isoton ist, gilt für beliebige Filtermengen $\mathfrak{M}$

$$\psi\Big(\bigvee_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{a}\Big) \geq \bigvee_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \psi\mathfrak{a} .$$

Um im Fall einer saturierten Menge $\mathfrak{M}$ die Gleichheit zu beweisen, wird gezeigt: Ist $\mathfrak{v}^*$ ein Ultrafilter mit $\mathfrak{v}^* \leq \psi\big(\bigvee_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{a}\big)$, so ist auch $\mathfrak{v}^* \leq \bigvee_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \psi\mathfrak{a}$ erfüllt. Wegen (2) folgt aus $\mathfrak{v}^* \leq \psi\big(\bigvee_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{a}\big)$ die Existenz eines Ultrafilters $\mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{v} \leq \bigvee_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{a}$ und mit $\mathfrak{v}^* = \psi\mathfrak{v}$. Da $\mathfrak{M}$ saturiert ist, gibt es wegen $\mathfrak{v} \leq \bigvee_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{a}$ einen Filter $\mathfrak{a}_0 \in \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{v} \leq \mathfrak{a}_0$. Es folgt

$$\mathfrak{v}^* = \psi\mathfrak{v} \leq \psi\mathfrak{a}_0 \leq \bigvee_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \psi\mathfrak{a} .$$

Die Zusatzbehauptung ergibt sich als Spezialfall: Ist $\mathfrak{u}$ ein Ultrafilter mit $\mathfrak{u} \leq \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$, so gilt $\mathfrak{u} \leq \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{u} \leq \mathfrak{b}$. Daher ist $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$ eine saturierte Menge.

(d) Zunächst sei A eine beliebige Teilmenge von X, und weiter sei $\mathfrak{M}_A = \{\mathfrak{u} \colon \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}$ und $A \in \mathfrak{u}\}$. Gilt für einen Ultrafilter $\mathfrak{u}^*$ nun $\mathfrak{u}^* \leq \bigvee_{\mathfrak{u} \in \mathfrak{M}_A} \mathfrak{u}$, so folgt aus der Definition von $\mathfrak{M}_A$ erst recht $A \in \mathfrak{u}^*$ und daher sogar $\mathfrak{u}^* \in \mathfrak{M}_A$. Somit ist $\mathfrak{M}_A$ saturiert.

Für jeden Punkt $x \in A$ ist der von x erzeugte Hauptfilter $\hat{x}$ ein Ultrafilter mit $A \in \hat{x}$, also mit $\hat{x} \in \mathfrak{M}_A$. Daher gilt zunächst für den von A erzeugten Hauptfilter $\hat{A}$

$$\hat{A} = \bigvee_{A \in \hat{x}} \hat{x} \leq \bigvee_{\mathfrak{u} \in \mathfrak{M}_A} \mathfrak{u} \leq \hat{A} \text{, also } \hat{A} = \bigvee_{A \in \hat{x}} \mathfrak{u}$$

und wegen (c) dann weiter

$$\psi\hat{A} = \psi\Big(\bigvee_{\mathfrak{u} \in \mathfrak{M}_A} \mathfrak{u}\Big) = \bigvee_{\mathfrak{u} \in \mathfrak{M}_A} \psi\mathfrak{u} = \bigvee_{\substack{A \in \mathfrak{u} \\ \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}}} \psi\mathfrak{u} .$$

Schließlich ist die Menge $\mathfrak{M} = \{\hat{A} \colon A \in \mathfrak{a}\}$ filtrierend, so daß sich mit Eigenschaft (1) der U-Abbildungen und mit der vorangehenden Gleichung

$$\psi\mathfrak{a} = \psi\Big(\bigwedge_{A \in \mathfrak{a}} \hat{A}\Big) = \bigwedge_{A \in \mathfrak{a}} \psi\hat{A} = \bigwedge_{A \in \mathfrak{a}} \bigvee_{\substack{A \in \mathfrak{u} \\ \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}}} \psi\mathfrak{u}$$

ergibt.

1.5 Satz *Es sei* ψ *eine U-Abbildung. Dann gilt für beliebige Teilmengen* M *von* X *und für alle Ultrafilter* $\mathfrak{u}^*$*: Aus*

$$\mathfrak{u}^* \leq \bigvee_{\substack{M \in \psi\mathfrak{u} > \mathfrak{o} \\ \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}}} \mathfrak{u} \ \wedge \bigvee_{\substack{X \setminus M \in \psi\mathfrak{u} > \mathfrak{o} \\ \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}}} \mathfrak{u}$$

folgt $\psi\mathfrak{u}^* = \mathfrak{o}$.

Beweis: Aus $\mathfrak{u}^* \leq \bigvee\{\mathfrak{u} : M \in \psi\mathfrak{u} > \mathfrak{o}, \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}\}$ folgt

(α) $\quad \mathfrak{u}^* = \bigwedge_{U^* \in \mathfrak{u}^*} \bigvee\{\mathfrak{u} : U^* \in \mathfrak{u}, M \in \psi\mathfrak{u} > \mathfrak{o}, \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}\}$ und

(β) $\quad \psi\mathfrak{u}^* = \bigwedge_{U^* \in \mathfrak{u}^*} \bigvee_{\substack{U^* \in \mathfrak{u} \\ \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}}} \psi\mathfrak{u}$

wegen Satz 1.4 (d). Aus (α) ergibt sich die Existenz einer Menge $U_o^* \in \mathfrak{u}^*$ mit folgender Eigenschaft: Aus $\mathfrak{u} \in \mathfrak{U}$ und $U_o^* \in \mathfrak{u}$ folgt $M \in \psi\mathfrak{u} > \mathfrak{o}$. Wegen (β) erhält man dann

$$\psi\mathfrak{u}^* \leq \bigvee_{\substack{U_o^* \in \mathfrak{u} \\ \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}}} \psi\mathfrak{u} \leq \hat{M}.$$

Aus $\mathfrak{u}^* \leq \bigvee\{\mathfrak{u} : X\setminus M \in \psi\mathfrak{u} > \mathfrak{o}, \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}\}$ ergibt sich entsprechend $\psi\mathfrak{u}^* \leq \widehat{X\setminus M}$, insgesamt also $\psi\mathfrak{u}^* \leq \hat{M} \wedge \widehat{X\setminus M} = \mathfrak{o}$. •

1.6 Satz *Es seien* χ *und* ψ *zwei U-Abbildungen. Dann ist auch* $\chi \circ \psi$ *eine U-Abbildung.*

Beweis: Es müssen die Eigenschaften (1) und (2) aus Definition 1.2 für $\omega = \chi \circ \psi$ nachgewiesen werden.

(1) $\mathfrak{M}$ sei filtrierend. Zu $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$ existiert also ein $\mathfrak{c} \in \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$. Wegen Satz 1.4 (a) folgt hieraus aber auch $\psi\mathfrak{c} \leq \psi(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \leq \psi\mathfrak{a} \wedge \psi\mathfrak{b}$. Daher ist mit $\mathfrak{M}$ ebenfalls $\mathfrak{M}^* = \{\Psi\mathfrak{a} : \mathfrak{a} \in \mathfrak{M}\}$ filtrierend. Man erhält deswegen

$$\omega(\bigwedge_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{a}) = \chi(\psi(\bigwedge_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{a})) = \chi(\bigwedge_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \psi\mathfrak{a}) = \chi(\bigwedge_{\mathfrak{a}^* \in \mathfrak{M}^*} \mathfrak{a}^*)$$
$$= \bigwedge_{\mathfrak{a}^* \in \mathfrak{M}^*} \chi\mathfrak{a}^* = \bigwedge_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \chi(\psi\mathfrak{a}) = \bigwedge_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \omega\mathfrak{a}.$$

(2) Gegeben seien ein Filter $\mathfrak{a}$ und ein Ultrafilter $\mathfrak{u}^*$ mit $\mathfrak{u}^* \leq \omega\mathfrak{a}$. Zu beweisen ist die Existenz eines Ultrafilters $\mathfrak{u}$ mit $\mathfrak{u} \leq \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{u}^* = \omega\mathfrak{u}$.

Aus $\mathfrak{u}^* \leq \omega\mathfrak{a} = \chi(\psi\mathfrak{a})$ folgt mit dem Filter $\mathfrak{a}' = \psi\mathfrak{a}$ auch $\mathfrak{u}^* \leq \chi\mathfrak{a}'$. Und weil χ eine U-Abbildung ist, existiert ein $\mathfrak{u}' \in \mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{u}' \leq \mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{u}^* = \chi\mathfrak{u}'$. Da aber ψ ebenfalls eine U-Abbildung ist, gibt es wegen $\mathfrak{u}' \leq \mathfrak{a}' = \psi\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{u} \in \mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{u} \leq \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{u}' = \psi\mathfrak{u}$. Zusammen ergibt dies $\mathfrak{u}^* = \chi\mathfrak{u}' = \chi(\psi\mathfrak{u}) = \omega\mathfrak{u}$. •

2. Konstruktion von U-Abbildungen

Es sei $\mathfrak{U}_0$ eine nicht leere Menge von Ultrafiltern, und $\lambda\colon \mathfrak{U}_0 \to \mathfrak{U}$ sei eine Abbildung, die also jedem Ultrafilter $\mathfrak{u} \in \mathfrak{U}_0$ als Bild $\lambda(\mathfrak{u})$ wieder einen beliebigen Ultrafilter zuordnet. Dann wird durch

$$\psi_\lambda \mathfrak{a} = \bigwedge_{A \in \mathfrak{a}} \; \bigvee_{\substack{A \in \mathfrak{u} \\ \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}_0}} \lambda(\mathfrak{u}) \qquad (\mathfrak{a} \in \mathfrak{F})$$

jedenfalls eine Filterabbildung ψ_λ definiert.

2.1 Satz *Gilt* $\emptyset \neq \mathfrak{U}_0 \subset \mathfrak{U}$ und ist $\lambda\colon \mathfrak{U}_0 \to \mathfrak{U}$ *eine beliebig gewählte Abbildung, so besitzt* ψ_λ *die Eigenschaft* (1) *der U-Abbildungen; d.h. für jede filtrierende Teilmenge* $\mathfrak{M}$ *von* $\mathfrak{F}$ *gilt*

$$\psi_\lambda\Big(\bigwedge_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{a}\Big) = \bigwedge_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \psi_\lambda \mathfrak{a}.$$

Beweis: Wegen der Definition von ψ_λ gilt zunächst

$$\psi_\lambda\Big(\bigwedge_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{a}\Big) = \bigwedge_{B \in \bigwedge\limits_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{a}} \; \bigvee_{\substack{B \in \mathfrak{u} \\ \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}_0}} \lambda(\mathfrak{u}).$$

Nun ist aber $B \in \bigwedge_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{a}$ gleichwertig mit $B \in \mathfrak{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_n$ für endlich viele Filter $\mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_n \in \mathfrak{M}$. Und weil $\mathfrak{M}$ filtrierend ist, ergibt sich weiter die Gleichwertigkeit mit $B \in \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_n$ für ein $\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$. Daher folgt schließlich

$$\psi_\lambda\Big(\bigwedge_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{a}\Big) = \bigwedge_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}} \; \bigwedge_{B \in \mathfrak{b}} \; \bigvee_{\substack{B \in \mathfrak{u} \\ \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}_0}} \lambda(\mathfrak{u}) = \bigwedge_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}} \psi_\lambda \mathfrak{b}. \qquad \bullet$$

Die Eigenschaft (2) der U-Abbildungen wird jedoch von ψ_λ im allgemeinen nicht erfüllt. Dazu bedarf es zusätzlicher Forderungen an die Abbildung λ. Die folgenden Begriffsbildungen dienen dazu, eine geeignete hinreichende Bedingung aufzustellen. Dazu sei wie bisher $\emptyset \neq \mathfrak{U}_0 \subset \mathfrak{U}$, und $\lambda\colon \mathfrak{U}_0 \to \mathfrak{U}$ sei eine Abbildung.

2.2 Definition: Für $\mathfrak{u}^* \in \operatorname{Im}(\lambda) = \lambda(\mathfrak{U}_0)$ sei $\lambda^-(\mathfrak{u}^*) = \bigvee\{\mathfrak{u}\colon \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}_0, \lambda(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}^*\}$.

λ heißt eine *disjunkte* Abbildung, wenn $\{\lambda^-(\mathfrak{u}^*)\colon \mathfrak{u}^* \in \operatorname{Im}(\lambda)\}$ eine disjunkte Filtermenge ist, wenn es also paarweise punktfremde Teilmengen $Z_{\mathfrak{u}^*}$ von X mit $Z_{\mathfrak{u}^*} \in \lambda^-(\mathfrak{u}^*)$ für alle $\mathfrak{u}^* \in \operatorname{Im}(\lambda)$ gibt.

Da eine Zerlegung von X in paarweise punktfremde Teilmengen höchstens die Mächtigkeit von X besitzen kann, gilt für eine disjunkte Abbildung λ jedenfalls $|\operatorname{Im}(\lambda)| \leq |X|$.

2.3 Satz *Es sei* $\emptyset \neq \mathfrak{U}_0 \subset \mathfrak{U}$. *Wenn dann* $\lambda\colon \mathfrak{U}_0 \to \mathfrak{U}$ *eine disjunkte Abbildung ist, so ist* ψ_λ *eine U-Abbildung.*

B e w e i s : Es muß nur die Eigenschaft (2) der U-Abbildungen für ψ_λ nachgewiesen werden. Dazu seien ein Filter $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$ und ein Ultrafilter $\mathfrak{v}^*$ mit $\mathfrak{v}^* \leq \psi_\lambda \mathfrak{a}$ gegeben. Zu zeigen ist: Es gibt einen Ultrafilter $\mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{v} \leq \mathfrak{a}$ und $\psi_\lambda\, \mathfrak{v} = \mathfrak{v}^*$.

Wegen

$$\mathfrak{o} < \mathfrak{v}^* \leq \psi_\lambda \mathfrak{a} = \bigwedge_{A \in \mathfrak{a}} \; \bigvee_{\substack{A \in \mathfrak{u} \\ \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}_0}} \lambda(\mathfrak{u})$$

gilt für jede Filtermenge $V^* \in \mathfrak{v}^*$ und für jede Filtermenge $A \in \mathfrak{a}$

$$(*) \qquad \widehat{V^*} \wedge \bigvee_{\substack{A \in \mathfrak{u} \\ \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}_0}} \lambda(\mathfrak{u}) > \mathfrak{o}\,,$$

und daher gibt es zu V^* und A einen Ultrafilter $\mathfrak{u} \in \mathfrak{U}_0$ mit $A \in \mathfrak{u}$ und $V^* \in \lambda\,(\mathfrak{u})$: Andernfalls würde nämlich aus $\mathfrak{u} \in \mathfrak{U}_0$ und $A \in \mathfrak{u}$ stets $X \backslash V^* \in \lambda\,(\mathfrak{u})$ und daher $\widehat{V^*} \wedge \bigvee \{\lambda\,(\mathfrak{u})\colon \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}_0, A \in \mathfrak{u}\} = \mathfrak{o}$ im Widerspruch zu (*) gelten. Es folgt

$$\mathfrak{a} \wedge \bigwedge_{V^* \in \mathfrak{v}^*} \; \bigvee_{\substack{V^* \in \lambda(\mathfrak{u}) \\ \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}_0}} \mathfrak{u} > \mathfrak{o}\,,$$

und somit gibt es einen Ultrafilter $\mathfrak{v}$ mit

$$(**) \qquad \mathfrak{v} \leq \mathfrak{a} \wedge \bigwedge_{V^* \in \mathfrak{v}^*} \; \bigvee_{\substack{V^* \in \lambda(\mathfrak{u}) \\ \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}_0}} \mathfrak{u}\,,$$

für den also jedenfalls $\mathfrak{v} \leq \mathfrak{a}$ erfüllt ist. Wegen der bereits aus der Eigenschaft (1) der U-Abbildungen folgenden Isotonie von ψ_λ und weil $\{\widehat{V^*}\colon V^* \in \mathfrak{v}^*\}$ filtrierend ist, ergibt sich weiter

$$(*\overset{*}{}*) \qquad \psi_\lambda \mathfrak{v} \leq \bigwedge_{V^* \in \mathfrak{v}^*} \Big(\psi_\lambda \bigvee_{\substack{V^* \in \lambda(\mathfrak{u}) \\ \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}_0}} \mathfrak{u}\Big)\,.$$

Da $\{\lambda^-(\mathfrak{u}^*)\colon \mathfrak{u}^* \in \mathrm{Im}\,(\lambda)\}$ nach Voraussetzung eine disjunkte Filtermenge ist, gibt es paarweise punktfremde Teilmengen $Z_{\mathfrak{u}^*}$ ($\mathfrak{u}^* \in \mathrm{Im}\,(\lambda)$) mit $Z_{\mathfrak{u}^*} \in \lambda^-(\mathfrak{u}^*)$. Daher gilt

$$\bigvee_{\substack{V^* \in \lambda(\mathfrak{u}) \\ \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}_0}} \mathfrak{u} = \bigvee_{\substack{V^* \in \mathfrak{u}^* \\ \mathfrak{u}^* \in \mathrm{Im}(\lambda)}} \lambda^-(\mathfrak{u}^*) \leq \bigvee_{\substack{V^* \in \mathfrak{u}^* \\ \mathfrak{u}^* \in \mathrm{Im}(\lambda)}} \widehat{Z_{\mathfrak{u}^*}}\,.$$

Weil aber aus $\mathfrak{u}' \in \mathfrak{U}_0$ und $Z_{\mathfrak{u}^*} \in \mathfrak{u}'$ jetzt $\lambda\,(\mathfrak{u}') = \mathfrak{u}^*$ folgt, erhält man wegen der Definition von ψ_λ

$$\psi_\lambda \bigvee_{\substack{V^* \in \lambda(\mathfrak{u}) \\ \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}_0}} \mathfrak{u} \leq \psi_\lambda \bigvee_{\substack{V^* \in \mathfrak{u}^* \\ \mathfrak{u}^* \in \mathrm{Im}(\lambda)}} Z_{\mathfrak{u}^*} \leq \bigvee_{\substack{V^* \in \mathfrak{u}^* \\ \mathfrak{u}^* \in \mathrm{Im}(\lambda)}} \mathfrak{u}^* \leq \widehat{V^*}$$

und daher wegen $(*\overset{*}{}*)$

$$\psi_\lambda\, \mathfrak{v} \leq \bigwedge_{V^* \in \mathfrak{v}^*} \widehat{V^*} = \mathfrak{v}^*.$$

Andererseits folgt aus (**)

$$\mathfrak{v} \leq \bigwedge_{V^* \in \mathfrak{v}^*} \bigvee_{\substack{V^* \in \lambda(\mathfrak{u}) \\ \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}_0}} \mathfrak{u} \leq \bigvee_{\mathfrak{u} \in \mathfrak{U}_0} \mathfrak{u}\,.$$

Zu jeder Filtermenge $V \in \mathfrak{v}$ gibt es daher mindestens einen Ultrafilter $\mathfrak{u} \in \mathfrak{U}_0$ mit $V \in \mathfrak{u}$, woraus $\psi_\lambda\, \mathfrak{v} \neq \mathfrak{o}$ folgt. Damit hat sich insgesamt $\mathfrak{o} < \psi_\lambda\, \mathfrak{v} \leq \mathfrak{v}^*$ ergeben. Und da $\mathfrak{v}^*$ selbst ein Ultrafilter ist, muß sogar $\psi_\lambda\, \mathfrak{v} = \mathfrak{v}^*$ erfüllt sein. •

2.4 Satz *Es sei* $\emptyset \neq \mathfrak{U}_0 \subset \mathfrak{U}$, *und* $\lambda\colon \mathfrak{U}_0 \to \mathfrak{U}$ *sei eine disjunkte Abbildung. Für alle* $\mathfrak{v} \in \mathfrak{U}_0$ *gilt dann* $\psi_\lambda \mathfrak{v} = \lambda(\mathfrak{v})$.

B e w e i s: Es sei $\mathfrak{v} \in \mathfrak{U}_0$ gegeben. Für alle $V \in \mathfrak{v}$ ist dann $\mathfrak{v}$ selbst ein Ultrafilter aus $\mathfrak{U}_0$ mit $V \in \mathfrak{v}$, und man erhält

$$\psi_\lambda\, \mathfrak{v} = \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \bigvee_{\substack{V \in \mathfrak{u} \\ \mathfrak{u} \in \mathfrak{U}_0}} \lambda(\mathfrak{u}) \geq \bigwedge_{V \in \mathfrak{v}} \lambda(\mathfrak{v}) = \lambda(\mathfrak{v})\,.$$

Wegen $\lambda\colon \mathfrak{U}_0 \to \mathfrak{U}$ ist $\lambda(\mathfrak{v})$ ein Ultrafilter, woraus sich $\psi_\lambda\, \mathfrak{v} \geq \lambda(\mathfrak{v}) > \mathfrak{o}$ ergibt. Wegen Satz 2.3 ist ψ_λ eine U-Abbildung, so daß nach Satz 1.4 (b) nun auch $\psi_\lambda\, \mathfrak{v}$ ein Ultrafilter sein muß, weswegen sogar $\psi_\lambda\, \mathfrak{v} = \lambda(\mathfrak{v})$ erfüllt ist. •

Die Forderung aus Satz 2.3, daß λ eine disjunkte Abbildung sein soll, ist jedenfalls dann gewährleistet, wenn $\mathfrak{U}_0$ selbst eine disjunkte Filtermenge ist oder wenn Im (λ) aus nur einem Ultrafilter besteht. Dieser letzte Fall tritt zum Beispiel bei einer abzählbaren Grundmenge X in einer Situation auf, die schon in „Abzählbar primitive Ultrafilter II" erwähnt wurde:

Es sei $I = \{\iota : \iota < \eta\}$ eine wohlgeordnete Indexmenge mit einer überabzählbaren Limeszahl η. Jedem Index $\iota \in I$ sei ein Ultrafilter $\mathfrak{v}_\iota$ zugeordnet, und zu je zwei Indizes ι, κ mit $\iota < \kappa$ existiere eine auf $\mathfrak{v}_\kappa$ nicht injektive Punktabbildung $\varphi_{\iota,\kappa}$ mit $\hat{\varphi}_{\iota,\kappa}\, \mathfrak{v}_\kappa = \mathfrak{v}_\iota$. Schließlich sei $\mathfrak{u}^*$ ein freier Ultrafilter der Indexmenge I. Dann ist

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{U^* \in \mathfrak{u}^*} \bigvee_{\iota \in U^*} \mathfrak{v}_\iota$$

wieder ein Ultrafilter. Es wurde aber gezeigt, daß es im allgemeinen kein System $\{\varphi_\iota :$ $\iota \in I\}$ von Punktabbildungen mit $\hat{\varphi}_\iota\, \mathfrak{w} = \mathfrak{v}_\iota$ und mit $\hat{\varphi}_\iota = \hat{\varphi}_{\iota,\kappa} \circ \hat{\varphi}_\kappa$ geben kann. Setzt man jedoch bei festem $\iota \in I$ zunächst $\mathfrak{U}_{0,\,\iota} = \{\mathfrak{v}_\kappa : \iota < \kappa < \eta\}$, so wird hierdurch wegen $\mathrm{Im}\,(\lambda_\iota) = \{\mathfrak{v}_\iota\}$ eine U-Abbildung $\psi_\iota = \psi_{\lambda_\iota}$ definiert. Für diese U-Abbildungen ψ_ι gilt dann offenbar

$$\psi_\iota \mathfrak{w} = \mathfrak{v}_\iota \quad \text{und} \quad \psi_\iota = \hat{\varphi}_{\iota,\kappa} \circ \psi_\kappa\,(\iota < \kappa < \eta).$$

3. Präordnungen

Wie dieses Beispiel zeigt, kann die auf der Menge $\mathfrak{U}$ der Ultrafilter von X durch Punktabbildungen definierte Präordnung $\blacktriangleleft$ mit Hilfe von U-Abbildungen in geeigneter Weise verallgemeinert werden. Dabei kann man noch durch entsprechende Einschränkungen dieser Abbildungen erreichen, daß die verallgemeinerten Präordnungen immer noch einen nicht zu groben Vergleich von Ultrafiltern ermöglichen.

3.1 Satz *Es sei Ψ eine Menge von U-Abbildungen, die alle von Punktabbildungen induzierte Filterabbildungen und mit ψ_1, ψ_2 auch $\psi_2 \circ \psi_1$ enthält. Dann wird durch*

$$\mathfrak{u}_1 << \mathfrak{u}_2 \leftrightarrow \textit{Es gibt ein } \psi \in \Psi \text{ mit } \psi\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}_1$$

auf $\mathfrak{U}$ eine Präordnung definiert, die eine Vergröberung der durch Punktabbildungen bestimmten Präordnung $\blacktriangleleft$ ist.

Beweis: Die Identität id: $X \rightarrow X$ ist eine Punktabbildung. Daher gilt $\hat{id} \in \Psi$ und somit $\mathfrak{u} << \mathfrak{u}$ für alle $\mathfrak{u} \in \mathfrak{U}$. Die Transitivität folgt unmittelbar aus der multiplikativen Abgeschlossenheit von Ψ. Und aus $\mathfrak{u}_1 = \hat{\varphi}\, \mathfrak{u}_2$ für eine Punktabbildung φ folgt wegen $\hat{\varphi} \in \Psi$ auch $\mathfrak{u}_1 << \mathfrak{u}_2$. •

Die Menge aller U-Abbildungen erfüllt wegen Satz 1.3 und Satz 1.6 offenbar die Voraussetzungen. Man kann sie jedoch den jeweiligen Zielen entsprechend erheblich einengen. Wichtige Beispiele bilden die Mengen aller derjenigen U-Abbildungen, die im Fall einer abzählbaren Grundmenge die Menge aller abzählbar primitiven Ultrafilter in sich abbilden, und die Teilmenge derjenigen Abbildungen ψ, die außerdem $\psi\, \mathfrak{u} \blacktriangleleft \mathfrak{u}$ für alle abzählbar primitiven Ultrafilter $\mathfrak{u}$ erfüllen, so daß auf diesen Filtern dann die Präordnung $<<$ mit der durch Punktabbildungen bestimmten Präordnung $\blacktriangleleft$ zusammenfällt.